

Falls für jedes l für mindestens einen Wert von m die Beziehung $I_m^{in} \neq 0$ gilt, z. B. wenn $I^{in}(\mathbf{n})$ die Form einer δ -Funktion für die Richtung normal zur Streufläche hat, so scheint eine solche Umkehrung im rein mathematischen Sinne tatsächlich möglich zu sein. Man kann aber vom physikalischen Standpunkt aus jene $I^{in}(\mathbf{n})$ nicht von vornherein diskriminieren, bei denen die I_m^{in} für einzelne l oder für alle l ab einem l_0 exakt verschwinden. Dann können über die entsprechenden $\sigma_0 - \sigma_l$ aus (6) keine Aussagen gewonnen werden und der Grenzwert (7) bleibt unter Umständen unbestimmbar. In diesen Fällen läßt sich die Reihe (5) nicht aufsummieren, da endliche Summanden unbestimmt bleiben.

In der physikalischen Praxis muß eine solche Nichtumkehrbarkeit als Regelfall angesehen werden, weil man zu berücksichtigen hat, daß $I^{in}(\mathbf{n})$ und $I^{out}(\mathbf{n})$ mit einem nicht beliebig kleinen Meßfehler ε versehen sind, so daß die Reihen (4) abgebrochen werden müssen, wenn der mathematische Approximationsfehler den Meßfehler ε unterschreitet. Brechen so die Reihen (4) bei $l = l_\varepsilon^{in, out}$ ab und ist l_ε^o die Mindestzahl der Terme, die man in (5) berücksichtigen muß, um den Approximationsfehler kleiner als ε zu machen, so erhält man unter Berücksichtigung der verschiedenen Konvergenzgeschwindigkeiten der Reihen (4) und (5) als Regelfall die Beziehungen

$$l_\varepsilon^o > l_\varepsilon^{out}, \quad l_\varepsilon^{in} > l_\varepsilon^{out}, \quad (8)$$

die Ausdruck der wechselseitigen Verschmierung von $I^{in}(\mathbf{n})$ und $\sigma(\cos \Theta)$ sind und im übrigen nicht von der Gültigkeit der zentralen Formel (6) abhängen, da die Entwicklungen (4) und (5) immer möglich sind.

Aus (8) lesen wir für unser Problem ab, daß höchstens l_ε^{out} Differenzen $\sigma_0 - \sigma_l$ aus einem Experiment extrahiert werden können, so daß weder der Grenzwert (7) noch die Reihe (5) bestimmbar sind. Ergänzt

man die bestimmbareren $\sigma_0 - \sigma_l$ irgendwie zu einem vollständigen $\sigma(\cos \Theta)$, so muß dessen Unsicherheit nach (8) größer als ε bleiben. Wir sehen in diesen Aussagen die Präzisierung des Prinzips des Informationsverlustes und der Nichtumkehrbarkeit der Theorie der Kleinwinkelveielfachstreuung und nicht etwa eine Schwäche des benützten Formelapparates, also von (6). Die vorliegende Form der Theorie scheint uns gerade deshalb besonders vorteilhaft, weil sie auf diese Zusammenhänge hinführt und sie nicht verdeckt.

Unsere Antwort auf die eingangs gestellte Frage lautet also: Aus der Messung der Intensitätsverteilung bei Veielfachstreuung läßt sich nur eine mit zunehmendem Nd abnehmende Anzahl von Differenzen $\sigma_0 - \sigma_l$ bestimmen, die im Regelfall nicht ausreichen, um daraus den Wirkungsquerschnitt $\sigma(\cos \Theta)$ bestimmen zu können. Eine Bestätigung der Theorie der Kleinwinkelveielfachstreuung durch das Experiment bestätigt das der Theorie zugrunde liegende Einzelstreugesetz nur in den bestimmbareren Differenzen $\sigma_0 - \sigma_l$, so daß mit einer solchen Messung alle $\sigma(\cos \Theta)$ verträglich sind, die in diesen Differenzen übereinstimmen. Zwischen konkurrierenden Ansätzen für $\sigma(\cos \Theta)$, z. B. dem MOLIERESchen und der zweiten BORNSchen Näherung der COULOMB-Streuung⁵, kann daher aus experimentellen Daten bei Vorliegen von Veielfachstreuung nur eine durch die experimentelle Unsicherheit – die experimentellen $\sigma_0 - \sigma_l$ sind mit Fehlern nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zu versehen! – und durch Informationsverlust eingeschränkte Entscheidung getroffen werden.

Ich danke Herrn Dr. H.-J. MEISTER für Diskussionen über den vorliegenden Gegenstand.

⁵ W. G. SIMON, Phys. Rev. **136**, B 410 [1964].

Low Energy Electron-Atom Scattering Cross-Section in Thomas-Fermi Theory

T. TIETZ

Department of Theoretical Physics, University of Lodz,
Lodz, Poland

(Z. Naturforsch. **21 a**, 360–361 [1966]; received 22 November 1965)

In a previous note¹ the author of this paper has discussed the low energy elastic scattering of electrons by neutral atoms using an approximate potential $V(r)$ for the HARTREE field. The purpose of this note is to discuss the low energy electron-atom scattering cross section in THOMAS-FERMI theory.

In quantum mechanics the scattering of a particle by a spherically symmetric potential can be described in terms of phase shifts. As known each phase shift is

an odd function of the wave number k , where k is related to the energy of the scattered particle by the relation $k^2 = 2mE/\hbar^2$.

For short range potentials the phase shifts are analytic at $k=0$ and can be expanded in odd powers of k . However, the long range potentials are not analytic at $k=0$, so they cannot be expanded in powers of k . This difference in low energy expansion of scattering phase shifts for long range potentials has been discussed in great details by LEVY and KELLER². They have shown that the phase shift η_0 and $k \cdot \text{ctg } \eta_0$ can be found if the scattering length a is known. In the LEVY and KELLER method the potential $V(r)$ is a long range potential that behaves asymptotically for large r -value as $V(r) = V_0 r^{-\nu}$ where $\nu=4$ and V_0 is a positive or negative constant. The THOMAS-FERMI potential fulfills the required condition of the LEVY-KELLER method. It is a long range potential with the required asymptotic behaviour. We will find below the scattering length a for an approximate THOMAS-FERMI potential. The author of this paper has shown that the following approxima-

¹ T. TIETZ, Z. Naturforsch. **19 a**, 1413 [1964].

² R. B. LEVY and J. B. KELLER, J. Math. Phys. **4**, 54 [1963].



tion for the THOMAS-FERMI function ³

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1+a_1 x)^2 (1+b_1 x)} \quad (1)$$

approximates well the exact THOMAS-FERMI function $\varphi(x)$. The constants a_1 and b_1 in Eq. (1) have the following numerical values: $a_1=0.475$ and $b_1=0.031$. In Table 1 we have compared some numerical values for $\varphi_a(x)$ with $\varphi(x)$.

Table 1 shows that $\varphi_a(x)$ is a good approximation for the exact $\varphi(x)$. In order to obtain the scattering length a we write the SCHRÖDINGER Eq. for the s-state in atomic units,

$$y_0'' + \left[k^2 + \frac{2Z}{r(1+Ar)^2(1+Br)} \right] y_0 = 0 \quad (2)$$

where

$$A = a_1 Z^{1/3}/0.88534, \quad B = b_1 Z^{1/3}/0.88534. \quad (3)$$

In Eqs. (2) and (3) Z is the atomic number. The scattering length a can be found from the SCHRÖDINGER Eq.

$$\begin{aligned} {}_1y_0(r) &= r \left(\frac{1+Br}{1+Ar} \right) {}_2F_1 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}, \quad 2, \frac{1+Br}{1+Ar} \right) \\ &= \frac{(1+Br)}{(A-B)} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}, \quad 2, \frac{1+Br}{1+Ar} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

In the last formula the symbol ${}_2F_1$ denotes the hypergeometric function. This formula shows that ${}_1y_0(r)$ is a solution of Eq. (2) for $k=0$. Another solution of Eq. (2) for $k=0$ ${}_2y_0(r)$ which fulfills the boundary condition ${}_2y_0(0)=0$ may also easily be obtained, namely:

$${}_2y_0(r) = C r {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}, \quad 2, \frac{(A-B)r}{1+Ar} \right) = C r {}_2F_1(r) \quad (5)$$

where C is an arbitrary constant. To obtain the scattering length a we need only ${}_2y_0(r)$.

The general asymptotic form for large r -value is expected to be

$${}_2y_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_1(r-a) \quad (6)$$

where C is some other arbitrary constant and a is the scattering length which in our case can be obtained from the relation

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{{}_2y_0'(r)}{{}_2y_0(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} + \frac{{}_2F_1'(r)}{{}_2F_1(r)} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r-a} \quad (7) \quad \text{so that} \quad a = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2 {}_2F_1'(r)}{{}_2F_1(r)} \quad (8)$$

where ${}_2F_1'(r) = \frac{d {}_2F_1(r)}{dr}$. Substituting Eq. (5) for ${}_2F_1(r)$ in the last formula we obtain for the scattering length a the following expression

$$a = - \frac{Z}{A^2} \frac{{}_2F_1 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}; \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}; \quad 3; \quad \frac{A-B}{A} \right)}{{}_2F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Z}{A-B}}; \quad 2; \quad \frac{A-B}{A} \right)}. \quad (9)$$

LEVY and KELLER have shown that the phase shift η_0 is related to a as follows

$$\eta_0 = -ka + \frac{1}{3}k^2 V_0 \pi + \frac{4}{3}a V_0 k^3 \log |k| + O(k^3) \quad (10)$$

where V_0 is in our case given by $V_0 = -2Z\mu^3/a_1^2 b_1$ and $\mu = 0.88534/Z^{1/3}$. The corresponding expression for $k \cdot \text{ctg } \eta_0$ in our case can be found in the paper of LEVY

³ T. TIETZ, Nuovo Cim. **28**, 1509 [1963].

x	$\varphi_a(x)$ Eq. (1)	exact values of $\varphi(x)$	x	$\varphi_a(x)$ Eq. (1)	exact values of $\varphi(x)$
0.0	1.000	1.000	10.0	0.02309	0.02431
0.3	0.7590	0.7206	12.0	0.01751	0.01706
0.6	0.5946	0.5612	15.0	0.01010	0.01081
1.0	0.4458	0.4240	20.0	0.005599	0.005785
2.0	0.2476	0.2430	25.0	0.003399	0.003474
3.0	0.1556	0.1566	35.0	0.001544	0.001551
4.0	0.1058	0.1084	50.0	0.0006402	0.0006323
5.0	0.07601	0.07881	70.0	0.0002689	0.0002623
6.0	0.05689	0.05942	90.0	0.0001379	0.0001336
8.0	0.03479	0.03659	100.0	0.0001037	0.0001002

Table 1. A comparison of our approximate solution of the THOMAS-FERMI function Eq. (1) with the exact THOMAS-FERMI function.

given by formula (2) since it can be solved exactly for $k=0$. It is very easy to see that the solution of Eq. (1) which fulfills the boundary condition ${}_1y_0(0) = \text{const}$ is given by

and KELLER. Since the scattering length a is given analytically one can find the total cross-section σ at low energy. It is known that the low elastic scattering of electrons by neutral atoms is of great interest in connection with the upper atmosphere, astrophysics, and the formation of negative ions.

The author is indebted to Prof. CHARLES SCHWARTZ from the University of California Berkeley U.S.A., for his precious remarks concerning the scattering length a defined by Eq. (6).